

«Кривой» камень

Вам дали небольшой камень весьма неправильной формы. Необходимо определить его плотность. У вас есть весы, линейка и пачка пластилина. Предложите способ для решения задачи.

Решение:

Взять кусок пластилина, изготовить из него ровное тело (шар, куб) измерить его объём. «Закатать» камешек в этот кусок пластилина (сделать шар или куб), измерить полученный объём. Разность полученных объемов – это объём камешка. Осталось измерить на весах массу камня и рассчитать его плотность.

Куда делась эмжэаш?

В высокогорную деревню доставляют уголь для отопления жилищ. За счет подъема вверх уголь приобретает дополнительную энергию (mgh). Спрашивается, при сжигании угля в домах эта энергия даёт дополнительное тепло или куда-то исчезает?

Решение:

Она осталась в потенциальной энергии золы, пепла и прочих продуктов горения.

Давление в лёгких

У вас есть какие хотите подручные средства и измерительные приборы, кроме одного – для измерения давления. А вам как раз надо измерить максимальное давление, создаваемое лёгкими человека. Предложите способ (-ы) для решения этой задачи.

Решение:

Лучшее измерение чего бы то ни было – это прямое измерение. Например, измерение давление в метрах (миллиметрах) столба жидкости – самое что ни на есть прямое! Можно взять и подуть снизу в вертикальную трубку с жидкостью (водой) и измерить столб жидкости, который мы давлением своих лёгких можем поднять. Это не очень удобно – можно нахлебаться воды... Куда лучше опустить трубку в воду и дуть в неё сверху. Опуская трубку всю глубже, необходимо поймать момент, когда мы больше не можем выдувать из трубки пузырьки. Глубина погружения трубки и даст нам искомое давление (1 метр водяного столба равен 9,8 кПа).

Можно придумать и массу косвенных способов – через измерение силы и площади её воздействия (цилиндр с поршнем, толкание струёй воздуха груза по поверхности и проч.). Понятно, что все они будут менее точными, но имеющими право на существование.

Рацион Дюймовочки

В мультфильме про Дюймовочку сказано, что она съедает ползёрнышка в день (зёрнышко весит 50 мг). Реально ли это?

Решение:

Линейный размер (рост) Дюймовочки примерно в 60 раз меньше, чем обычной (настоящей) девочки. При этом в силу подобия масса Дюймовочки (имеющая линейную зависимость от объема тела) будет меньше массы обычной девочки (возьмём 50 кг) в 60^3 раз. То есть масса Дюймовочки составляет по порядку величины не более 0,5 грамма. Далее предположим, что Дюймовочка подобна человеку не только геометрически, но и физиологически, то есть является теплокровным существом. Как известно, большую долю потребляемой энергии теплокровные существа тратят на поддержание требуемой температуры тела. В свою очередь, теплопотери тела происходят пропорционально площади тела. Площадь тела Дюймовочки меньше площади тела настоящей девочки в 60^2 раз. Значит примерно во столько же раз меньше Дюймовочка должна съесть в день пищи по срав-

нению с настоящей девочкой. Возьмём для оценки рацион настоящей девочки в 1,5 кг, тогда Дюймовочка должна съесть в день около 0,5 г. Как видно, это существенно (в 15 раз) больше, чем половинка зёрнышка. Кстати, из наблюдений за мелкими теплокровными животными мы знаем, что они едят действительно очень много (равно как и спят).

С другой стороны, мы получили, что Дюймовочка за день должна съесть еды никак не меньше массы собственного тела. То есть пищеварительная система Дюймовочки никак не может быть подобна пищеварительной системе обычного человека. Это говорит просто о том, что само существование Дюймовочки является нереальным.

От Рубцовска до Москвы

Летом Маша ездила поездом в Москву. За трое суток в пути только и мечтала – «Вот если бы изобрели такой транспорт, которому не нужны дороги и который может развивать любую скорость!». Как быстро можно было бы добраться из Рубцовска до Москвы (расстояние по прямой 2863 км) на таком транспорте, если обычный человек может выдержать длительную перегрузку без последствий для здоровья не более 1,5g?

Решение:

Чтобы максимально быстро на этом воображаемом транспорте преодолеть расстояние, необходимо первую половину пути двигаться с ускорением 1,5g, а вторую половину пути – тормозить с таким же ускорением. Понятно, что время прохождения этих двух участков пути будет равное, поэтому достаточно найти время разгона и умножить его на два. Используем кинематическое соотношение, связывающее пройденный путь с ускорением при нулевой начальной скорости:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Для нашего случая запишем искомое время:

$$t = 2 \sqrt{\frac{2S_{PM}/2}{1,5g}}$$

где S_{PM} – расстояние от Рубцовска до Москвы. Вычисления дают результат 14,6 минуты. (Очень быстро! Маше бы понравилось!)

Самый важный мотор

Наше сердце работает как новый мотор.

В. Цой

Сердце часто образно называют мотором. Оцените мощность этого «мотора» на основании каких-либо данных, известных вам о сердце. То есть прикиньте, какого порядка величина мощности сердца (единицы, десятки, а может сотни или тысячи Ватт?).

Решение:

Самые общие представления о работе нашего сердца говорят, что оно создаёт кровоток в сосудах, выталкивая из себя под давлением P определенный объём крови V . То есть можно попробовать оценить работу сердца по формуле:

$$A = PV$$

Какое давление крови на выходе из себя создает сердце? Видимо, больше того, под которым кровь находится в сосудах (чтобы её протолкнуть). А под каким давлением кровь находится в сосудах? Так его же постоянно измеряют! Например, нормальным давлением взрослого человека считается 120/80. 120 – это так называемое верхнее (максимальное) давление, которое и приходится преодолевать сердцу. Единственная трудность – вы можете не знать единицы измерения этого давления. Хотя это одна из главных еди-

ниц измерения давления – миллиметры ртутного столба. Возьмём для оценки $P = 100$ мм.рт.ст. = 13,3 кПа, то есть порядка 10^4 Па.

Далее, чему равен объем выталкиваемой сердцем крови? Опять же из общих знаний известно, что размер сердца человека примерно равен кулаку, но она разделено на два «отсека» (по научному – желудочка, хотя есть там и ещё отсеки - предсердия) и имеет толстые стенки. Хорошо, свой кулак мы можем измерить, представив его шаром диаметром, например, 10 см. Получим объём кулака человека порядка $50 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$, то есть пол-литра. Поделим пополам (так как толкает кровь один из двух желудочков), потом еще пополам (учтём толстые стенки), получим по порядку величины 10^{-4} м^3 , то есть 100 мл (пол-стакана, ну вроде похоже на правду, хотя в реальности чуть поменьше).

Итак, оценим работу сердца:

$$A = 10^4 \text{ Па} \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 \sim 1 \text{ Дж}.$$

Следует заметить, что мы оценили не всю работу сердце. Ведь ему надо не только создать давление крови на своём выходе, но и придать этой крови некоторую кинетическую энергию (чтоб она потекла по сосудам). Но что-то нам подсказывает, что это уже не основная работа (действительно, она в 100 раз меньше) и её оценивать мы не будем.

Далее, мощность равна работе за единицу времени. Здесь у нас как будто красиво получается, ведь сердце «стучает», то есть создаёт давление примерно один раз в секунду. Это не совсем так, ведь в течение этой одной секунды сердце «стукнет», а потом «отдыхает». То есть давление оно создает в течение какой-то доли секунды. Оценим её в одну треть секунды.

Итак, оценка мощности сердца даёт нам:

$$N = \frac{A}{t} \sim \frac{1 \text{ Дж}}{\frac{1}{3} \text{ с}} = 3 \text{ Вт}$$

Можно попробовать оценить мощность сердца другим способом. Известной всем является цифра количества крови у человека – в среднем около 5 литров. Весьма упрощенно можно представить, что сердце за одну минуту поднимает всю кровь от пяток до головы, то есть на высоту роста человека. Оценка мощности в этом случае дает около 2 Вт.

Таким образом, мощность сердца составляет не сотни и даже не десятки, а всего несколько единиц Ватт. Однако не стоит недооценивать работу нашего сердца (имеется в виду не с точки зрения жизнеобеспечения организма, а с точки зрения механики). За сутки оно совершает приличную работу: в этом легко убедиться, умножив 1 Дж на количество секунд в сутках (получим 86400 Дж). Этой энергией можно поднять 10 тонн груза на высоту почти 1 метра!

Много стекла

Представьте себе толстый лист стекла толщиной L и несколько сложенных друг с другом (практически без воздушного зазора) тонких листов стекла общей толщиной тоже L . Сравните такие их характеристики, как пропускание света, теплопроводность, твердость (на излом).

Решение:

Лист стекла толщиной L лучше пропускает свет и проводит тепло, чем несколько листов стекла общей толщиной L , но на излом выдержит меньше нагрузки.

Опасная верёвка

Если подвешенная вертикальная верёвка может выдержать на пределе двух человек, то это не значит, что одному человеку можно на ней раскачиваться без последствий. Определите максимальный угол, на который может раскачаться на этой верёвке человек (чтобы не травмировать человека, представим, что это просто груз массой m).

Решение:

Понятно, что максимальную нагрузку верёвка испытывает, когда груз при раскачивании проходит нижнюю точку траектории. Эта нагрузка (то есть натяжение веревки) равна:

$$mg + m a_{ц} = mg + m \frac{v^2}{L}$$

где L – длина веревки. При отклонении груза на верёвке на угол α он имеет потенциальную энергию по отношению к нижней точке траектории:

$$mgL(1 - \cos\alpha)$$

которая при движении груза в нижней точке переходит в его кинетическую энергию:

$$mgL(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}$$

Отсюда:

$$m \frac{v^2}{L} = 2mg(1 - \cos\alpha)$$

Тогда натяжение веревки при прохождении груза нижней точки траектории равно:

$$mg + 2mg(1 - \cos\alpha)$$

Приравняем её к $2mg$ (предельная нагрузка, которую выдерживает верёвка) и найдем предельный угол раскачки:

$$\begin{aligned} mg + 2mg(1 - \cos\alpha) &= 2mg \\ \cos\alpha &= 1/2 \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

Итак, раскачавшись на веревке до угла 60 градусов, груз будет при прохождении нижней точки траектории оказывать предельную нагрузку на верёвку. При превышении этого угла верёвка порвётся.

Полный стакан капель

Ну, я же просил четыреста капель, а тут – четыреста две!
Громозека

В известном мультфильме герой Громозека мог «на глаз», но очень точно измерять количество капель в стакане. Попробуйте вы, пусть и не с такой точность, как Громозека, оценить, сколько капель воды в полном стакане.

Решение:

Самый простой способ оценки в этой ситуации – прямой, через объёмы стакана и капель воды. Объем обычного стакана равен 200 мл. С объёмом капли, конечно, будет посложнее. Визуально мы представляем себе, что капли могут быть очень разные по размеру (например, это зависит от диаметра трубки, из которой капает вода). Допустим, их характерный размер – диаметр – лежит в диапазоне 4÷5 мм (конечно, можно получить капли и меньшего размера, и если вы выбрали значение в пределах 2÷3 мм, то ваше решение будет засчитано). В пересчете на миллилитры получим ~0,035÷0,065 мл. Тогда оценка количества капель в стакане дает значение ~(3÷6)·10³ капель. К слову, в фармации, где важна

точность при приготовлении лекарств, объем водной капли берется равным 0,05 мл, что приводит к 4000 каплям в стакане. Стоит также добавить, что размеры формируемых капель жидкостей зависят от сил поверхностного натяжения в этих жидкостях. Поэтому размеры капель разных жидкостей могут существенно отличаться.

Самолет в магнитном поле

Антон Холкин летел на самолете в Москву, смотрел в иллюминатор, и тут его осенило – самолет со своими крыльями есть тот самый проводник, который движется с некоторой скоростью в магнитном поле (такую задачу он решал на уроке физике). А значит, на концах крыльев самолета индуцируется ЭДС! «Интересно, – подумал Антон, – а может эту ЭДС надо использовать с пользой? Например – питать электрооборудование самолета... ». Оцените эту ЭДС. Можно ли ей будет питать электроприборы самолёта? Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли у полюсов составляет 60–70 мкТл, уменьшаясь к экватору практически до нуля.

Решение:

ЭДС индукции проводника длиной l , движущегося в магнитном поле со скоростью v , определяется выражением:

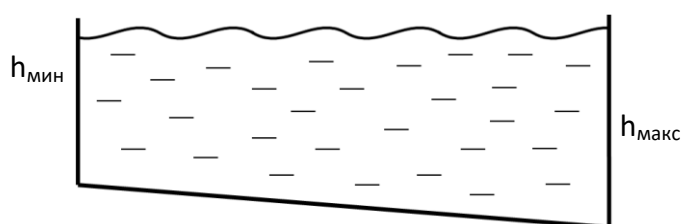
$$E = vBl$$

где B – индукция магнитного поля.

Для оценки величины ЭДС возьмём скорость пассажирского самолета 800 км/ч, размах крыльев – 30 метров, индукцию магнитного поля – 50 мкТл (примерно такое значение она имеет на территории России). Тогда получим значение для ЭДС порядка 0,3 В.

Понятно, что если для оценки вы возьмёте несколько другие значения скорости, размаха крыльев, напряженности поля, то получите значение ЭДС индукции, лежащее в диапазоне 0,01÷1 Вольт. В любом случае питать электрооборудование самолёта таким напряжением будет невозможно.

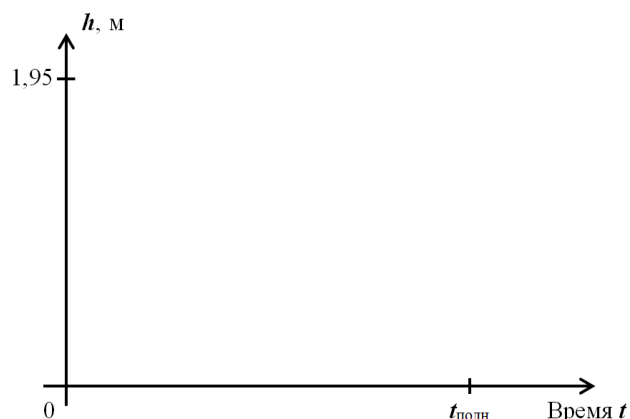
Полный бассейн



Бассейн в спорткомплексе «Юбилейный» г. Рубцовска имеет размеры 25×11 метров. Его глубина линейно меняется от минимального значения $h_{\text{мин}} = 1,25$ м у одной стороны бассейна до максимального значения $h_{\text{макс}} = 1,95$ м у другой стороны бассейна.

1. Рассчитайте, сколько стоит (в рублях) заполнение бассейна водой, которая должна иметь температуру не ниже 24 °С. Известно, что кубометр холодной воды, которая имеет температуру 8 °С, стоит 17 рублей, а кубометр горячей воды с температурой (по нормам) 60 °С, стоит 110 рублей.

2. Изобразите графики зависимости высоты уровня воды в бассейне у мелкой и глубокой сторон бассейна от времени (в одних осях) при его равномерном наполнении. За нулевую точку отсчёта принять дно у глубокой стороны. На представленном макете координатной плоскости графиков отмечены характерные точки – максимальный уровень воды (1,95 м) и время наполнения бассейна $t_{\text{полн}}$.



Решение:

Первая часть задачи не представляет никакой сложности, а только интерес.

Объем бассейна, представляющего в нашем случае трапециевидную призму, равен:

$$V = 25 \cdot 11 \cdot \frac{1,25 + 1,95}{2} = 440 \text{ м}^3$$

Расход горячей и холодной воды найдем из условия теплового баланса: холодная вода должна нагреться, а горячая – остыть до одной температуры $t = 24 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$c \cdot m_{\text{хол}} \cdot (t - t_{\text{хол}}) = c \cdot m_{\text{гор}} \cdot (t_{\text{гор}} - t)$$

где c – теплоёмкость воды.

Перейдём от масс к объёмам, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} V_{\text{хол}} &= 2,25 V_{\text{гор}} \\ V_{\text{хол}} + V_{\text{гор}} &= 440 \end{aligned}$$

Решая систему, получим:

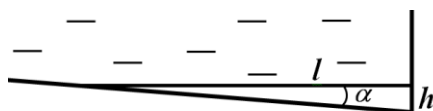
$$\begin{aligned} V_{\text{гор}} &\approx 135,4 \text{ м}^3 \\ V_{\text{хол}} &\approx 304,6 \text{ м}^3 \end{aligned}$$

Переходя к деньгам, получим сумму (округленно) в 20 000 рублей. Прилично!

При построении графиков сложность вызывает период времени, в течение которого наполняется «кривая» нижняя часть бассейна. После этого периода (как только вода коснётся стенки, у которой минимальное значение глубины, что будет соответствовать высоте 0,7 м), графики уровней воды у обеих сторон будут одинаковыми прямыми линиями, которые закончатся на отметке 1,95 м и $t_{\text{полн}}$.

Итак, рассмотрим промежуток времени, в течение которого уровень воды у глубокой стороны поднимается до 0,7 м.

Рассмотрим элемент объёма:



Его объём равен:

$$V = H \cdot l \cdot h/2$$

где H – ширина бассейна.

Так как $l = h/\text{tg}\alpha$, а $\text{tg}\alpha$ со временем не изменяется, то:

$$V \sim h^2$$

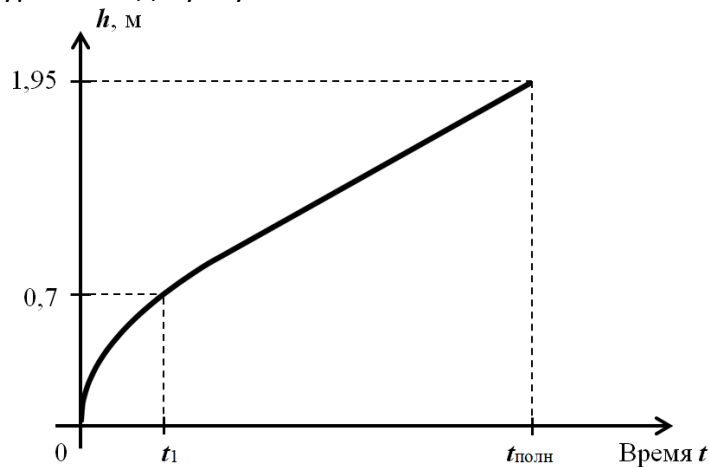
А значит:

$$h \sim \sqrt{V}$$

Так как $V(t) \sim t$ (вода по условию поступает равномерно), то окончательно имеем:

$$h \sim \sqrt{t}$$

Таким образом, до некоторого момента времени t_1 (кстати, его легко можно определить в долях от $t_{\text{полн}}$) график зависимости уровня воды будет иметь вид функции корня квадратного от времени. Начиная с момента времени t_1 график зависимости примет прямолинейный вид. Кроме этого, с этого же момента времени начнёт повышаться уровень воды у мелкой стенки, и, как уже было сказано, этот график будет иметь в точности такой же вид, как график уровня воды у глубокой стенки.



Тепло для чая

Антон Холкин на уроке физкультуры быстро спустился с каната и в буквальном смысле обжёг ладони рук. «Интересно, – подумал Антон, – а сколько воды можно было вскипятить этим теплом, которое мне обожгло руки? На стаканчик чая хватит?». Помогите Антону в оценке этого значения. Известно, что длина каната 3 метра, масса Антона – 60 кг, начальная температура воды для чая 20 °С.

Решение:

В идеальном случае будем считать, что вся энергия, запасенная Антоном при залезании по канату – а это его потенциальная энергия – пойдет на нагревание воды массой m :

$$Mgh = cm\Delta T,$$

Отсюда:

$$m = \frac{Mgh}{c\Delta T} = \frac{60 \cdot 9,8 \cdot 3}{4200 \cdot 80} = 0,00525 \text{ кг}$$

Получается немного – всего 5 грамм (одна чайная ложка воды). Чай не попить, а вот руки действительно очень сильно обжигает.

Сахар «исчезает»

В летнем международном образовательном лагере Маша заметила, что американские ребята кидают в пепси-колу лёд, чтобы охладить напиток (они привыкли, видите ли, пить ледяную пепси-колу). Маша попробовала сделать так же, но ей это крайне не понравилось. Во-первых, от такого ледяного напитка может разболеться горло. Во-вторых – и это

главное – напиток теряет свой вкус, так как становится менее сладким. Маша провела небольшие исследования и рассчитала, на сколько процентов уменьшается массовая концентрация сахара в охлажденном с помощью льда напитке.

Повторите расчеты Маши. Результаты её исследований были таковы:

Температура тёплой пепси-колы 30 °С.

Температура льда 0 °С.

Температура охлажденной пепси-колы (когда весь лёд растаял) 10 °С.

Решение:

Пусть масса тёплой пепси-колы равна m_T , концентрация сахара в ней равна n_T , тогда чистая масса сахара в тёплой пепси-коле равна $m_T n_T$. После добавления в напиток льда массой m_L его масса стала равной $m_T + m_L$, а концентрацию сахара в охлажденном напитке обозначим n_X . Тогда чистая масса сахара в холодном напитке равна $(m_T + m_L) n_X$. Понятно, что сахар на самом деле никуда не исчез (как звучит в названии задачи), поэтому:

$$m_T n_T = (m_T + m_L) n_X$$

Откуда получим соотношение для концентраций:

$$\frac{n_X}{n_T} = \frac{m_T}{m_T + m_L}$$

Далее запишем условие теплового баланса для происходящего процесса:

$$cm_T(t_T - t_X) = \lambda m_L + cm_L(t_X - 0)$$

Здесь тёплая пепси-кола с температурой t_T охлаждается до температуры t_X , а лёд сначала превращается в воду такой же массы и эта вода нагревается от температуры 0° до t_X .

Выразим из полученного соотношения массу льда:

$$m_L = \frac{cm_T(t_T - t_X)}{\lambda + ct_X}$$

Подставим его в соотношение для концентраций и получим:

$$\frac{n_X}{n_T} = \frac{\lambda + ct_X}{\lambda + ct_T}$$

Подставляя имеющиеся значения, получим:

$$\frac{n_X}{n_T} \approx 0,82$$

Таким образом, концентрация сахара в пепси-коле уменьшилась на 18%.

Шары в покое

Где-то в безвоздушном пространстве два совершенно одинаковых шара с зарядами 10^{-10} Кл находятся вплотную друг к другу, но, как это положено одноименно заряженным телам, не разлетаются друг от друга. Найдите минимально возможную массу этих шаров.

Решение:

Шары отталкиваются друг от друга с силой Кулона:

$$F_{\text{кул}} = k \frac{q^2}{r^2}$$

Шары не разлетаются, потому что по закону всемирного тяготения на них действует гравитационная сила притяжения:

$$F_T = G \frac{m^2}{r^2}$$

Минимально возможную массу шаров найдем из условия, что эти силы равны:

$$k \frac{q^2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2}$$

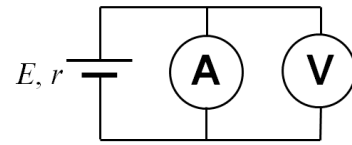
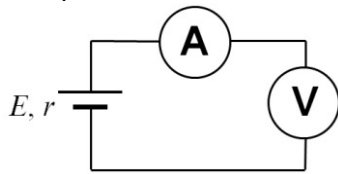
Откуда:

$$m = q \sqrt{\frac{k}{G}}$$

Расчет даёт значение $m \approx 1,16$ кг.

Бесполезные цепи

На лабораторной по физике Маше выдали только источник питания с неизвестной ЭДС и внутренним сопротивлением, неидеальный вольтметр и неидеальный амперметр. Маша собрала две простейшие и, казалось бы, бесполезные цепи, представленные на рисунках:



Однако благодаря показаниям приборов в этих опытах (обозначим их I_1 и U_1 для первой цепи, I_2 и U_2 для второй цепи) Маше удалось определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника питания. Выведите и вы выражения для определения параметров источника питания по измеренным значениям токов и напряжений.

Решение:

Закон Ома для полной цепи в первом опыте:

$$E = I_1(R_A + R_B + r)$$

Причём:

$$R_B = \frac{U_1}{I_1}$$

Закон Ома для полной цепи во втором опыте:

$$E = I_{\text{общ}} \left(\frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B} + r \right)$$

Где:

$$R_A = \frac{U_2}{I_2}$$

$$I_{\text{общ}} = I_2 + I_{2B}$$

I_{2B} – ток через вольтметр

$$I_{2B} = \frac{U_2}{R_B} = \frac{U_2}{U_1/I_1}$$

Приравниваем выражения ЭДС для двух опытов, выражаем внутреннее сопротивление r :

$$r = \frac{U_1 - U_2 \left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)}{I_2 - I_1 \left(1 - \frac{U_2}{U_1}\right)}$$

Выражение для ЭДС (берем для первого опыта) имеет вид:

$$E = I_1 \left(\frac{U_2}{I_2} + \frac{U_1}{I_1} + r \right)$$

Справочные данные

Этими справочными данными можно пользоваться при решении задач.

Константы

Число π

$$\pi = 3,14$$

Ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$$

Соотношение между различными единицами:

1 дюйм = 2,54 см

1 мм.рт.ст. = 133 Па

Удельная теплоёмкость воды

$$4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})$$

Удельная теплота плавления льда

$$3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг.}$$