Коэффициент найти просто 1.

Перед Вами сейчас лежит лист бумаги. Положите на него ручку. Определите экспериментально коэффициент трения ручки о бумагу. Всё, что Вам для этого нужно из измерительных средств – это линейка (если у Вас её с собой нет, попросите у организаторов Олимпиады).

Решение. Положите ручку на лист бумаги посередине вдоль длинных сторон, ближе к левому краю. Возьмите лист правой рукой за левые углы так, чтобы получился желобок, внутри которого лежит ручка. Левой рукой приготовьте линейку в вертикальном положении. Начните поднимать лист за углы, одновременно фиксируя высоту поднятия края листа. Как только ручка начнёт равномерно скользить по бумаге, зафиксируйте высоту поднятия листа h. Проведите измерения несколько раз, усредните результат. После этого измерьте длину листа и рассчитайте длину основания «горки» L. Коэффициент трения равен $\mu = tg(\alpha) = h/L$ (вывод этого выражения, как правило, обязательно делается в учебниках или задачниках, поэтому мы его не приводим).
То есть осталось просто поделить длину основания «горки» на её высоту, при которой ручка начала равномерно скользить по бумаге.

Коэффициент найти просто 2.

Вы сидите за столом, у вас есть веревка и линейка. Предложите, как можно определить коэффициент трения веревки о поверхность стола.

Решение. Измерим линейкой длину веревки, обозначим l. Положим веревку на стол и свесим часть веревки со стола. Найдем такую длину свешивающейся части, что веревка еще находится в покое и не соскальзывает со стола под действием силы тяжести свешивающейся части. Измерим линейкой свешивающуюся часть, обозначим $l_{\text{св}}$. Обозначим массу той части веревки, которая лежит на столе, как $m_л$, а части, которая свешивается – $m_{\text{св}}$. Силу тяжести свешивающейся части веревки уравновешивает сила трения лежащей на столе части веревки, то есть: $m_{\text{св}}g = \mu m_л g$., где μ – искомый коэффициент трения веревки о стол.
Отсюда: $m_{\text{св}} = \mu m_л$
Так как длина и масса веревки связаны линейно, то можно записать: $l_{\text{св}} = \mu l_л$.
У нас $l_л = l - l_{\text{св}}$
Тогда выражая μ, получим: $\mu = \frac{l_{\text{св}}}{l - l_{\text{св}}}$
Если измерять лежащую на столе часть веревки, то получим: $\mu = \frac{l}{l_л} - 1$.

Измерение нитками.

У вас имеется стержень (пруток), нитки, штатив и секундомер (линейки нет!). Необходимо оценить объём стержня (из чего он сделан – совершенно не важно).

Решение. Подвешиваем с помощью штатива стержень на двух нитях наподобие качели (на одной нити просто не получится – стержень будет трудно уравновесить, а при раскачивании он будет крутиться). При этом длины нитей необходимо сделать <u>равными длине стержня</u>! Измеряем период колебаний стержня (например, 3 измерения по 10 колебаний с последующим усреднением). Из формулы для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

находим длину нитей l, а значит и длину стержня:

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

Далее наматываем нитку длиной l на стержень и считаем количество витков (понятно, что оно может оказаться не целым, но куда деваться – нас просят выполнить оценку, а не точное измерение):

$$l = 2\pi r \cdot k,$$

где r – радиус стержня, k – количество витков нити. Выразим отсюда r и подставим в формулу для определения площади поперечного сечения стержня (то есть круга):

$$S = \pi r^2 = \frac{l^2}{4\pi k^2}$$

Осталось найти требуемую величину – объем стержня:

$$V = S \cdot l = \frac{l^3}{4\pi k^2} = \frac{T^6 g^3}{256\pi^7 k^2}$$

Стоит отметить, что есть еще один способ (менее точный) измерения длины прутка. Сбросить стержень с высоты, например, $10l$, измерить время падения, из которого найти высоту падения. Поделив её на 10, получим длину стержня.

Первый закон Васи.

Василий лежал дома на диване. В одну сторону (на тренировку) его тянула сила в 60 Н. В противоположную сторону (в кино) его тянула сила в 100 Н. Перпендикулярно этим силам (просто погулять) его тянула сила в 40 Н. Но Вася не двигался. Определите направление и величину силы лени, действующей на Васю.

Решение. Так как Вася находился в покое, значит по первому закону ~~Васи~~ Ньютона все силы действующие на него, скомпенсированы. В частности, та самая сила, которая шуточно названа в условии задачи силой лени, должна компенсировать три другие силы, действующие на Васю. Её не сложно найти геометрическим построением. Она направлена под углом 45 градусов к силе, тянущей Васю на тренировку, и равна $40\sqrt{2}$ Н.

Качок.

Антон Холкин качал ручным насосом колесо автомобиля (колесо с камерой, камера изначально полностью пустая). Отец сказал, что нужно накачать до 2 атмосфер. Но вот незадача – манометра у Антона не было. Зато он смог измерить объем колеса – 0,02 м^3, и объем нагнетательной части насоса – 200 см^3. Спрашивается, сколько качков насосом надо сделать Антону (будем считать, что накачиваемый воздух не нагревается).

Решение. Обозначим объем колеса V, объем нагнетательной камеры насоса $V_н$, атмосферное давление – $P_{атм}$. Что происходит при каждом качке: в насосе имеется порция воздуха объемом $V_н$ при атмосферном давлении $P_{атм}$; далее эта порция переходит в «сосуд» (колесо) объемом V, создавая там некое парциальное давление P. При допущении, что температура воздуха не изменяется, имеем закон Бойля-Мариотта:

$$P_{атм}V_н = PV$$

N качков насосом создадут в колесе давление NP:

$$NP_{атм}V_н = NPV$$

По условию задачи NP= $2P_{атм}$. Таким образом, имеем:

$$NP_{атм}V_н=2P_{атм}V$$

Откуда: $N=2V/V_н$

$N=2*2*10^4/200 = 200$ раз.

Можно было рассуждать вообще «по-житейски» (не вспоминая про закон Бойля-Мариотта): чтобы просто заполнить воздухом (то есть с атмосферным давлением) изначально полностью пустое колесо до объема V порциями объёмом $V_н$, нужно $N=V/V_н$ порций. А чтобы создать еще одну атмосферу давления в колесе, нужно еще N порций (и так далее).
Если в подобных задачах говорится, что в накачиваемом сосуде изначально уже есть воздух с атмосферным давлением, то, например, чтобы довести давление до двух атмосфер надо только N качков насосом.

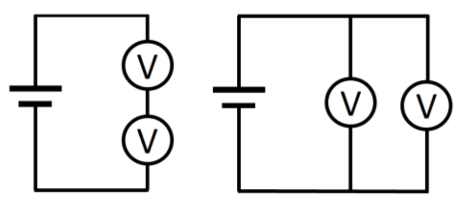
Экономить надо честно.
Антон Холкин успешно поступил в институт, поселился в общежитии. Ради экономии он предложил студентам из соседней комнаты запитать лампочки освещения последовательно и платить за свет поровну. «Если считать, – говорил Антон, – что сопротивления ламп всегда постоянны, а их номинальные мощности одинаковы, то при последовательном соединении вместо параллельного мы получим четырехкратную экономию энергии!». Сказано – сделано. Однако при этом Антон ради пущей экономии поменял у себя лампочку на другую – с номинальной мощностью в два раза меньше. Но экономия по-прежнему осталась четырёхкратной. Антон сразу понял, что в этом виноваты соседи. Спрашивается, какую экономию хотел получить Антон, и что сделали соседи?

Решение. Судя по всему, соседи оказались еще большими экономистами и вообще отказались от освещения, закоротив свою лампочку.
Мощность в цепи (за время использования которой мы, собственно, платим) для разных вариантов подключения лампочек зависит от общего сопротивления цепи:

$$P = \frac{U^2}{R_{общ}}$$

Обозначим сопротивление лампочки R, тогда для двух одинаковых лампочек при параллельном соединении получим $R_{общ}$ = R/2, а при последовательном соединении $R_{общ}$ = 2R. Видно, что для этих двух вариантов подключения отношение мощностей действительно равно 4. Антон подключил лампочку с номинальной мощностью в два раза меньше, то есть с сопротивлением 2R. Значит общее сопротивление должно было стать $R_{общ}$ = 3R, а экономия по сравнению с исходным вариантом – в 6 раз! А раз экономия осталась прежней, то это значит, что общее сопротивление осталось равным 2R, а это говорит о том, что соседи поставили «лампочку» с нулевым сопротивлением.

Странные вольтметры.
На лабораторной по изучению закона Ома для полной цепи от нечего делать Маша подключила к источнику постоянного электрического тока два одинаковых вольтметра – сначала последовательно, затем параллельно. Она заметила, что показания вольтметров были одинаковы в обеих схемах. При каком условии такое возможно?



Решение. Обозначим: E – ЭДС источника, r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление вольтметра, U – показания вольтметров (они по условию все равны). Вслед за Машей запишем закон Ома для полной цепи. Для первой схемы имеем:

$$I_1 = \frac{E}{2R + r}$$

Ток выразим через участок цепи, представляющий собой один вольтметр:

$$I_1 = \frac{U}{R}$$

Выразим из этих выражений ЭДС:

$$E = \frac{(2R + r)}{R} U$$

Для второй схемы имеем:

$$I_2 = \frac{E}{R/2 + r}$$

$$I_2 = \frac{U}{R/2}$$

(R/2 – общее сопротивление параллельно соединенных вольтметров, I_2 – ток в основном контуре, до разветвления).

Выразим из этих выражений ЭДС:

$$E = \frac{(R/2 + r)}{R/2} U$$

Приравнивая выражения для ЭДС, получим:

$$\frac{(2R + r)}{R} = \frac{(R/2 + r)}{R/2}$$

Отсюда: $R = r$. Таким образом, Маша делала измерения вольтметрами, сопротивление которых равно внутреннему сопротивлению источника тока.

Рекорды ГТО.

Одиннадцатиклассник Вася и третьеклассник Петя в целях подготовки к сдаче норм ГТО бегали на перемене по коридорам школы и, как это иногда бывает, совершили лобовое центральное соударение. После соударения Вася остался стоять на месте, а Петя «полетел» в противоположную сторону и был остановлен стеной. В результате этого стена не пострадала, а у Пети поднялась температура на 0.05 градуса. Известно, что Вася в три раза тяжелее Пети. Спрашивается, сможет ли Петя выполнить норматив ГТО II-ой ступени на золотой значок в беге на 60 метров (10,4 сек)?

Средняя удельная теплоемкость тела человека равна 3350 Дж/(кг·град).

Решение. Из условия задачи следует, что соударение Васи и Пети было абсолютно упругим. Для описания такого соударения применяется закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии, из которых выводятся скорости тел после соударения. Для нашей задачи этот вывод довольно прост, так как одна из скоростей (скорость Васи) после соударения равна нулю. Запишем:

$$m_\text{В} v_\text{В} - m_\text{П} v_\text{П} = m_\text{П} v'_\text{П}$$

$$\frac{m_\text{В} v_\text{В}^2}{2} + \frac{m_\text{П} v_\text{П}^2}{2} = \frac{m_\text{П} v'^2_\text{П}}{2}$$

где $m_\text{В}$ и $v_\text{В}$ – масса Васи и его скорость до соударения, $m_\text{П}$ и $v_\text{П}$ – масса Пети и его скорость до соударения, $v'_\text{П}$ – скорость Пети после соударения.

Решение этой системы уравнений не представляет сложности, тем более что по условию задачи $m_{\text{В}} = 3m_{\Pi}$ и массы из уравнений сразу исключаются. В итоге получим, что

$$v_{\Pi} = v_{\text{В}}$$
$$v'_{\Pi} = 2v_{\Pi}$$

То есть начальные скорости школьников были равны, а скорость Пети после соударения в два раза больше начальной.

Далее (в соответствии с условием) Петя на скорости $2v_{\Pi}$ совершил абсолютно неупругое соударение со стенкой, вся кинетическая энергия Пети перешла в тепловую, поэтому:

$$\frac{m_{\Pi}(2v_{\Pi})^2}{2} = m_{\Pi}c\Delta T$$

Откуда:

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{\text{c}\Delta T}{2}}$$

В результате вычислений получим, что скорость Пети перед соударением была $v_{\Pi} = 9{,}15$ м/с. С такой скоростью в беге на 60 м можно выполнить норматив мастера спорта международного класса (6,7 сек), не говоря уже о всех ступенях норм ГТО.

Дарующий энергию.

Антон Холкин в поисках дешёвой энергии заинтересовался (известной вам) формулой энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

где q – заряд на обкладках конденсатора, C – ёмкость конденсатора, определяемая выражением:

$$\text{C} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика между пластинами, ε_0 – электрическая постоянная; S – площадь пластин, d – расстояние между пластинами.

Из формул он заметил, что если расстояние между пластинами заряженного конденсатора увеличить, допустим, в 2 раза, то его энергия при этом возрастёт тоже в 2 раза! Итак, делаем большой конденсатор с раздвижными пластинами, заряжаем его, потратив энергию W, раздвигаем пластины (немного энергии потратится из-за трения при механическом движении), и снимаем с конденсатора путём разрядки энергию $2W$! Объясните Антону, что ничего из этого не получится.

Решение. При раздвижении пластин, помимо работы против сил трения, придется совершить работу против силы электрического поля между обкладками конденсатора, которая стремится сблизить пластины (разноименно заряженные пластины притягиваются друг к другу). Эта работа и переходит в энергию конденсатора. Так что ничего «выжать» из конденсатора у Антона не получится.

Максимальная скорость.

Среднестатистический легковой автомобиль имеет массу 1 тонну, коэффициент трения колес о дорогу μ = 0.65, фактор обтекаемости k = 0.5, КПД трансмиссии η = 0.9. При его движении сила сопротивления воздуха имеет квадратичную зависимость от скорости: $F_{\text{c}} = kv^2$. Спрашивается, какую максимальную скорость может развить такой автомобиль и какой мощности двигатель для этого нужен? (напомним перевод: 1 кВт = 1,35962 л. с.)

Решение. Для решения задачи главным является понимание того, что так называемая сила тяги автомобиля есть не что иное, как сила трения о дорогу. При равномерном установившемся движении автомобиля (когда он развил максимальную скорость) сила трения равна силе сопротивления воздуха $F_{\text{тр}} = F_c$, то есть:

$$\mu mg = kv_{\text{макс}}^2 ,$$

откуда $v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{\mu mg}{k}} \approx 113$ м/с или 406 км/ч.

Чтобы найти мощность двигателя для развития такой скорости воспользуемся формулой:

$$N = Fv_{\text{макс}}$$

$$\text{или} \quad N = kv_{\text{макс}}^3 \approx 719{,}5 \text{ кВт или } 978 \text{ л.с.}$$

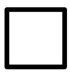
Учитывая КПД трансмиссии автомобиля, окончательно получим необходимую мощность двигателя $N \approx 1087$ л.с. (это мощность двигателей суперспорткаров!).

На самом деле наши расчеты носят в некоторой степени оценочный характер, так как мы пренебрегаем некоторыми моментами. Во-первых, при движении автомобиля действует также сила трения качения (сопротивление движению, возникающее при перекатывании тел друг по другу, в нашем случае колеса по дороге). Она существенно меньше трения скольжения (поэтому обычно в таких задачах не учитывается), но при этом зависит от скорости качения. Причем с увеличением скорости эта зависимость приобретает некий сложный характер. Во-вторых, КПД трансмиссии также зависит от скорости (от скорости вращения валов, подшипников и шестерён передачи, особенно если в трансмиссии есть гидравлические передачи), а именно уменьшается при возрастании скоростей вращения. В итоге, даже если мы поставим на обычный легковой автомобиль двигатель в 1000 л.с., навряд ли мы сможем разогнать его до «самолетной» скорости.

Дальнейшее увеличение мощности двигателя не приведет к увеличению скорости – просто начнется проскальзывание колёс ($F_{\text{тр}} < F_c$). Поэтому необходимо либо увеличивать силу трения (коэффициент μ или силу, с которой автомобиль прижимается к дороге, например, с помощью крыльев), либо уменьшать фактор обтекаемости автомобиля с помощью придания ему более обтекаемой формы. Именно это всё и делается для спортивных (гоночных) автомобилей.

Наш же описанный среднестатистический легковой автомобиль с мощностью двигателя, например, 100 л.с. разовьет максимальную скорость:

$$v = \sqrt[3]{\frac{N\eta}{k}} \approx 51 \text{ м/с} \quad \text{или} \quad 184 \text{ км/ч}.$$

Неизвестная точность. 

Нарисуйте от руки (не пользуясь никакими инструментами) на своём листе бумаги квадратик площадью 100 мм^2. Оцените, с какой точностью Вы это сделали (например, в процентах).

Решение. Во-первых, необходимо оценить погрешность Δx нанесения отрезка длиной 1 см. Представляется, что меньше 1 мм она быть не может – навряд ли глазомер обычного человека способен на лучшее. Таким образом, относительная погрешность этого действия равна 10%. Оценку погрешности построения квадратика необходимо проводить как оценку погрешности косвенного измерения. Вид нашей функции имеет вид: S(x)=x*x. Не приводя выводы выражений, напомним, что если в косвенном измерении присутствует умножение или деление измеряемых величин, то относительная погрешность косвенного измерения представляет собой сумму относительных погрешностей непосредственно измеряемых величин (если в косвенном измерении присутствует только сложение или вычитание, то складываются абсолютные погрешности измеряемых величин). Таким образом, относительная погрешность нашего построения может быть оценена в 20%.

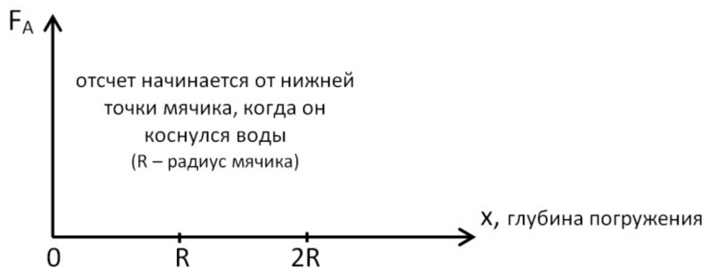
Сколько их?

У Вас есть морская свинка? А у кого-нибудь в Вашем классе есть морская свинка? Оцените, сколько морских свинок живёт в Рубцовске.

Решение. Понятно, что для искомой оценки нужны две отправные цифры – количество жителей города и доля счастливых обладателей милых животных. Причем если первая цифра достаточно хорошо известна, то вторую, как раз таки, надо оценить. Если в классе есть держатель морской свинки, то эта оценка только через количество учеников в классе будет не совсем корректна. Действительно, если в классе, например, 25 человек, то утверждать, что 1/25 населения города имеет морскую свинку, будет неправильным. Можно только предполагать, что морскую свинку имеет 1/25 всех учащихся. И для дальнейшей оценки нужно число всех учащихся города.
Более корректной видится оценка через количество семей в городе. Ведь морские свинки (главным образом) живут в семьях! То есть 1/25 – есть ни что иное, как доля семей, в которых есть морская свинка. В Рубцовске живёт порядка $15\cdot10^4$ людей. Средняя семья состоит из 5 человек (здесь оценки могут расходиться, но мы рассуждаем о семье, в которой живёт ученик, а значит могут считаться и бабушки с дедушками). Значит в Рубцовске порядка $3\cdot10^4$ семей. Умножая на 1/25, получим оценку, что в Рубцовске живёт порядка 10^3 морских свинок.
Обратите внимание, что варьирование количества учеников в классе, количества держателей морских свинок в классе (например, у двоих-троих есть эти животные), равно как и учет свинок, которые живут не в семьях (зоомагазины и др.), не изменят порядок оцененной величины – 10^3.
Сложнее, если в классе не оказалось любителей морских свинок. В этом случае можно попытаться оценить общее количество морских свинок в городе через их количество в зоомагазинах, частоту их продажи и продолжительность жизни.

Наша Таня громко плачет…

Маша, вспоминая детский стишок, погружала в речку мячик, воображая, как зависит сила Архимеда, действующая на него, от глубины погружения. Помогите воображению Маши и изобразите (качественно) эту зависимость.

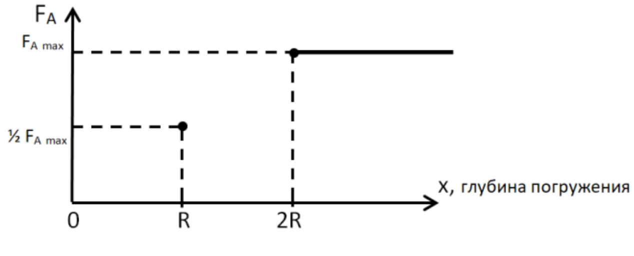


Решение. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды. Вода вытесняется объемом шарового сегмента, погруженного в воду. Поэтому в идеальном случае необходимо получить зависимость объема шарового сегмента от глубины погружения шара:

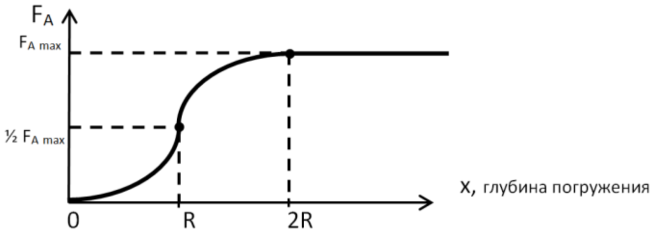
$$V=\pi x^2(R - x/3), \qquad \text{(на участке от 0 до R)}$$

где R – радиус шара, x – глубина его погружения в воду (легко убедиться, что погрузив шар наполовину, то есть при x = R, мы получим половину объема шара).

Но, в принципе, для качественного построения графика получение этой зависимости не предполагалось. Главное – правильная расстановка характерных точек графика. При погружении шара сила Архимеда растет; при глубине погружения, равном R, она принимает половинное значение от максимальной, при полном погружении шара (глубина 2R) она приобретает максимальное значение и далее не изменяется:



Не имея перед глазами зависимости объема погруженной части шара от глубины погружения, мы всё равно понимаем, что эта зависимость нелинейная (поэтому будет ошибочным изобразить на участке от 0 до 2R прямую линию). Как уже было отмечено, сила Архимеда растет и достигает некоего насыщения, поэтому в такой ситуации напрашивается кривая насыщения (описывающая многие физические процессы). Характерным для таких кривых является наличие точки перегиба и плавный переход к насыщению (её еще называют S-образная кривая):



Точка перегиба находится при половинном погружении шара в воду.

С воздухом и без.

«Сопротивлением воздуха пренебречь». Маше не давала покоя эта фраза, постоянно встречающаяся в задачах на движение тела. Во-первых, она не могла понять, что это значит – воздух есть, но он какой-то другой, что не оказывает никакого сопротивления, или его вообще нет? Во-вторых, а если мы не будем пренебрегать воздухом (без него всё-таки невозможно жить), то сильно ли это повлияет на задачки по физике? Например, если мы кидаем тело вертикально вверх, то в случае пренебрежения сопротивлением воздуха оказывается, что время подъема тела равно времени падения. Попробуйте объяснить Маше, а как будет «с воздухом»? (то есть как буду соотносится времена подъема и падения тела).

Решение. Можно объяснять так: при движении тела вверх сила сопротивления воздуха F_c направлена в ту же сторону, что и сила тяжести mg. Поэтому тело движется с ускорением:

$$a_{вверх} = g + F_c/m.$$

При падении тела сила сопротивления F_c направлена в другую сторону, и ускорение определяется выражением:

$$a_{вниз} = g - F_c/m.$$

Видно, что $a_{вверх} > a_{вниз}$, а так как тело проходит одно расстояние, то значит $t_{вверх} < t_{вниз}$. То есть время подъема оказывается меньше времени падения.

Что касается понятия «сопротивлением воздуха пренебречь», то имеется ввиду, что воздух, конечно, есть, и сопротивление он оказывает по всем законам, просто оно в этой задаче оказывается незначительным, поэтому небольшая неточность в решении задачи допустима.
